**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**

**„ADOLF HAIMOVICI”**

**ETAPA LOCALĂ**

**SUCEAVA - 18 FEBRUARIE 2023**

**CLASA a X-a**

**H2** **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**1.** **(7p)** În condiții de viață favorabile musculițele Drosophila Melanogaster se înmulțesc cu 28% pe zi. Într-un laborator, o populație de 25 de musculițe este plasată într-un terariu. Determinați timpul în care numărul musculițelor crește de 100 de ori, folosind eventual că $lg2 \approx 0,3$ .

Prof. Mihaela Ghelbere

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Notăm cu $a_n$ numărul musculițelor din terariu după $n$ zile<br>Avem $a_1 = 25 + \frac{28}{100}25 \Rightarrow a_1 = 25 \cdot 1,28$ și $a_n = a_{n-1} + \frac{28}{100}a_{n-1} \Rightarrow a_n = 1,28 \cdot a_{n-1}$ | 2p |
| | Șirul $a_n$ este o progresie geometrică cu rația $q = 1,28$ | 1p |
| | $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 25 \cdot 1,28^n$ ,dar $a_n = 2500 \Rightarrow$<br>$2500 = 25 \cdot (1,28)^n$ | 2p |
| | $(1,28)^n = 100 \Rightarrow lg(1,28)^n = lg100 \Leftrightarrow n(7lg2 - 2) = 2 \Leftrightarrow n \cdot 0,1 = 2$<br>$\Leftrightarrow n = 20$ | 2p |

**2.** a) **(3p)** Fie $a, b \in (0, +\infty), a \neq 1, a \cdot b \neq 1$. Arătați că $log_a b - log_{ab} b = (log_a b) \cdot (log_{ab} b)$.
b) **(4p)** Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuația $\left[2^{\log_2 n - \log_2(n+1) + \log_2(n+2)}\right] = n$, unde $[a]$ înseamnă partea întreagă a numărului a.

Prof. Marcela Hopulele și Prof. Aura-Loreta Pogorevici

| | | |
|---|---|---|
| 2a) | $\log_a b - \log_{ab} b = \log_a b - \frac{\log_a b}{\log_a ab} = \log_a b\left(1 - \frac{1}{\log_a a b}\right) =$ | 1p |
| | $(\log_a b)(\log_{ab} ab - \log_{ab} a) = (\log_a b) \log_{ab} \frac{ab}{a} = (\log_a b)(\log_{ab} b)$ | 2p |
| 2b) | $\left[2^{log_2 n - log_2(n+1) + log_2(n+2)}\right] = \left[2^{log_2 \frac{n(n+2)}{n+1}}\right] = \left[\frac{n(n+2)}{n+1}\right] = \left[n + \frac{n}{n+1}\right]$ | 2p |
| | Cum $n \in \mathbb{N}^*$ și $n < n + 1 \Rightarrow \left[n + \frac{n}{n+1}\right] = n + \left[\frac{n}{n+1}\right] = n + 0 = n$ | 1p |
| | Deci orice număr natural nenul este soluția ecuației $\Rightarrow$ ecuația are o infinitate de soluții | 1p |

**3.** a) **(4p)** Determinați $z \in \mathbb{C}$, știind că $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.

b) **(3p)** Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Să se arate că $z = \dfrac{z_1^6 + z_2^6 + z_3^6}{z_1^2 z_2^2 z_3^2}$ este număr real.

Prof. Marcela Hopulele și Prof. Aura-Loreta Pogorevici

| | | |
|---|---|---|
| 3a) | Fie $z = a + bi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ un număr care satisface egalitatea din enunț<br>Ne rezultă că $a^2 - b^2 + 2abi + 2a - 2bi + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2a + 1 + (2ab - 2b)i = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 + 2a + 1 = 0$ și $ab - b = 0$ | 1p |
| | Din $ab - b = 0 \Rightarrow a = 1$ sau $b = 0$<br>Dacă $a = 1$, atunci egalitatea $a^2 - b^2 + 2a + 1 = 0$ conduce la $4 - b^2 = 0$, de unde $b = -2$ sau $b = 2$ | 1p |
| | Dacă $b$= 0, atunci egalitatea $a^2 - b^2 + 2a + 1 = 0$ conduce la $a^2 + 2a + 1 = 0$, de unde $a = 1$ | 1p |
| | Drept urmare $z = -1$ sau $z = 1 - 2i$ sau $z = 1 + 2i$ | 1p |
| 3b) | Notăm $z_1^2 = x, z_2^2 = y, z_3^2 = t$.<br>Cum $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow x + y + t = 0 \Rightarrow t = -x - y \; cu \;\; x, y, t \in \mathbb{C}^*$ | 1p |
| | $\dfrac{z_1^6 + z_2^6 + z_3^6}{z_1^2 z_2^2 z_3^2} = \dfrac{x^3 + y^3 + (-x - y)^3}{xy(-x - y)} = \dfrac{x^3 + y^3 - (x + y)^3}{-xy(x + y)} =$ | 1p |
| | $\dfrac{-3x^2y - 3xy^2}{-xy(x + y)} = \dfrac{3xy(x + y)}{xy(x + y)} = 3 \Rightarrow z = 3 \in \mathbb{R}$ | 1p |

**4.** Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$.

a) **(3p)** Calculați $f\left(\frac{9}{2}\right)$.

b) **(4p)** Demonstrați că $\mathrm{Im} f = \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$.

Prof. Constantin Ciobîcă și prof. Elena Ciobîcă

| | | |
|---|---|---|
| 4a) | $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{\dfrac{2x + 2\sqrt{2x - 1}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2x - 1 + 2\sqrt{2x - 1} + 1}{2}}$<br>$= \sqrt{\dfrac{(\sqrt{2x - 1} + 1)^2}{2}} = \left\lvert \dfrac{\sqrt{2x - 1} + 1}{\sqrt{2}} \right\rvert = \dfrac{\sqrt{2x - 1} + 1}{\sqrt{2}}$<br>$x \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{2x - 1} + 1 \geq 2$ | 1p |

| | | |
|---|---|---|
| | $\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{\frac{2x-2\sqrt{2x-1}}{2}} = \sqrt{\frac{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1}{2}}$<br>$= \sqrt{\frac{(\sqrt{2x-1}-1)^2}{2}} = \left\lvert\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2}}\right\rvert = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2}}$<br>$\sqrt{2x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}-1 \geq 0$ | 1p |
| | $f(x) = \sqrt{4x-2} \Rightarrow f\left(\frac{9}{2}\right) = \sqrt{4 \cdot \frac{9}{2} - 2} = \sqrt{16} = 4$ | 1p |
| 4b) | Studiem monotonia funcției $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}\ f(x) = \sqrt{4x-2}$ .<br>$R = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\sqrt{4x_1-2}-\sqrt{4x_2-2}}{x_1-x_2} =$<br>$= \frac{4(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)\cdot\left(\sqrt{4x_1-2}+\sqrt{4x_2-2}\right)} = \frac{4}{\left(\sqrt{4x_1-2}+\sqrt{4x_2-2}\right)}$ | 2p |
| | Cum $x_1, x_2 \in [1,+\infty) \Rightarrow \sqrt{4x_1-2}+\sqrt{4x_2-2} \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow R > 0 \Rightarrow$ f este strict crescătoare | 1p |
| | Deci Im$f = [f(1),+\infty). = \left[\sqrt{2},+\infty\right).$ | 1p |

**Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**