**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**

**„ADOLF HAIMOVICI”**

**ETAPA LOCALĂ**

**SUCEAVA - 18 FEBRUARIE 2023**

**CLASA a XI-a**

**H2** **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**1. (7p)** Să se calculeze $E=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin a}}{\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{a}}$ , unde $a\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ .

Soluție:

| | |
|---|---|
| Amplificarea cu conjugata numărătorului și apoi transformarea în produse a diferențelor de sinusuri conduc la : $E=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{2}\left(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\sin a}\right)}\cdot\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{2}}=$ | 3p |
| Aplicând limita remarcabilă se va obține $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos a}{2\cos\sqrt{a}\cdot\sqrt{\sin a}}\cdot\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\dfrac{\cos a}{2\cos\sqrt{a}\cdot\sqrt{\sin a}}\cdot 2\sqrt{a}=\dfrac{\sqrt{a}\cos a}{\cos\sqrt{a}\cdot\sqrt{\sin a}}$ | 4p |

2. Fie funcția f : $\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, f(x) = $\frac{ax^2+bx+c}{|x-1|}$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$.

a) **(4p)** Determinați numerele reale *a, b, c* pentru care dreapta de ecuație $y = x + 2023$ este asimptotă la graficul funcției *f* spre +∞ și $f(-1) = 1$.

b) **(3p)** Pentru valorile aflate anterior pentru *a, b* și *c*, să se determine asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției *f.*

| | |
|---|---|
| a) Din ecuația asimptotei avem că m=1 și n =2023 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x}=a=1$ | 2p |
| $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+bx+c}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{bx+c+x}{x-1}=b+1=2023.$ Deci *b*=2022 | 1p |
| Din *f*(−1)=1⟹ $\frac{1-2022+c}{2}=1\Rightarrow c$=2023 | 1p |

| | |
|---|---|
| b) Se verifică existența asimptotelor orizontale spre -∞<br>$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, deci nu sunt asimptote orizontale la graficul funcției spre $-\infty$ | 1p |
| $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2022x+2023}{-x^2+x} = -1$ | 1p |
| $n = \lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+2022x+2023}{-x+1} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2022x+2023-x^2+x}{-x+1}$<br>$= -2023$. Deci $n = -2023$.<br>Ecuația asimptotei spre $-\infty$ este: $y = -x - 2023$. | 1p |

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(R)$. Pentru $n \in N^*$ definim matricea $B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2}$ .

**a)** **(3p)** Arătați că $A^{2010} = a^{670} \cdot I_3$.

**b)** **(2p)** Determinați $a \in R$ pentru care $\det(B_1) = 0$ .

**c)** **(2p)** Determinați $a \in R$ pentru care toate matricele $B_n$, $n \geq 1$, $n \in N$ au determinantul nenul.

| | |
|---|---|
| a) Din calcule deduce că : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot I_3$ | 1p |
| Generalizând : $A^n = \begin{cases} a^k \cdot I_3, & n = 3k \\ a^k \cdot A, & n = 3k+1 \\ a^k \cdot A^2, & n = 3k+2 \end{cases}$ , $k \in N$ , $(\forall) n \in N^*$ $\Rightarrow A^{2010} = a^{670} \cdot I_3$ | 2p |
| b)<br>$B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2} \Rightarrow B_1 = A^1 + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B_1) = a^3 - 2a^2 + a = a(a-1)^2$. | 1p |
| Astfel, $\det(B_1) = 0 \Leftrightarrow a \in \{0,1\}$. | 1p |
| c) $B^n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2} = A^n(I_3 + A + A^2)$<br>Deci det $(B^n)$ = det $(A^n) \cdot \det(I_3 + A + A^2) = (\det(A))^n \cdot \det(I_3 + A + A^2) = a^n$<br>$(a-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ | 2p |

4. **(7p)** Fie punctele $A(1, 2)$ și $B(-1, 0)$. Determinați coordonatele unui punct $C$ situat pe dreapta de ecuație : $x + y - 2023 = 0$ astfel încât aria triunghiului $ABC$ să fie 2.

| | |
|---|---|
| $\mathcal{A}_\Delta = \frac{1}{2}\|D\|$, unde D = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 2x_c - y_c - y_c + 2 = 2x_c - 2\,(2023 - x_c) + 2$. | 3p |
| Prin calcul se obține $\|4x_c - 4044\| = 4 \Longrightarrow x_c \in \{1012, 1010\}$ | 2p |
| Punctele $C$ sunt : $C_1\,(1012, 1011)$ și $C_2\,(1010, 1013)$ | 2p |

**Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**