CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 FEBRUARIE 2023
Clasa a XII-a
Secțiunea H2, Filiera teoretică, profil Real, specializarea Științe ale naturii

1. **(7p)** Pe mulțimea $G=(0;2)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{xy}{xy-x-y+2}, \forall x,y\in G,$ care formează o structură de grup abelian.

   a) **(2p)** Determinați elementul neutru al grupului;

   b) **(3p)** Determinați numerele reale a și b astfel încât funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{ax+b}$ să fie izomorfism între grupul multiplicativ $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ și grupul $(G,\circ)$;

   c) **(2p)** Determinați numărul natural n, $n\geq 3$ astfel încât $\dfrac{4}{3}\circ\dfrac{6}{5}\circ........\circ\dfrac{2n}{2n-1}=\dfrac{4046}{2024}$.

(prof. Carp Cezar Nicolae, Câmpulung Moldovenesc)

Rezolvare și barem

a) $x\circ e=e\circ x=x\Rightarrow(e-1)(2x-x^2)=0, \forall x\in G\Rightarrow(e-1)=0\Rightarrow e=1$ .... **2 puncte**

b) f izomorfism $\Rightarrow f(1)=1$, $f(xy)=f(x)\circ f(y), \forall x,y\in(0;+\infty)$ .... **1 punct**

$\Rightarrow a+b=2, a^2=a, b=b^2-2b+2, a(b-1)=0\Rightarrow a=1, b=1,\ f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ .... **2 puncte**

c) $f\left(\dfrac{k-1}{k}\right)=\dfrac{2k}{2k-1}$ .... **1 punct**

$\Rightarrow\dfrac{4}{3}\circ\dfrac{6}{5}\circ........\circ\dfrac{2n}{2n-1}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)\circ f\left(\dfrac{2}{3}\right)\circ........\circ f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot........\dfrac{n-1}{n}\right)=$

$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{2n}{n+1}=\dfrac{4046}{2024}\Rightarrow n=2023$ .... **1 punct**

2. **(7p)** Se consideră mulțimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}3^k & -3^k & -3^k\\ -3^k & 3^k & 3^k\\ -3^k & 3^k & 3^k\end{pmatrix}; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   a) **(1p)** Arătați că $A(m)\cdot A(n)=A(m+n+1), \forall m,n\in\mathbb{Z}$;

   b) **(3p)** Arătați că $(G,\cdot)$ este un grup abelian, unde ”$\cdot$” reprezintă înmulțirea matricelor;

   c) **(3p)** Dacă H este un subgrup al lui G, $H\neq G$ și $A(2)\in H$, arătați că $A(2023)\notin H$.

(prof. Carp Cezar Nicolae, Câmpulung Moldovenesc)

Rezolvare și barem

a) Prin calcule $A(m)\cdot A(n)=A(m+n+1), \forall m,n\in\mathbb{Z}$ ....**1 punct**

b) Verificarea axiomelor grupului, elementul neutru $A(-1)$, simetricul $A'(m)=A(-m-2)$ și celelalte axiome...**3 puncte**

c) $A(2)\in H\Rightarrow A^n(2)=A(3n-1)\in H, n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow A'(3n-1)=A(-3n-1)\in H$ ....**1 punct**

Dacă $A(2023)\in H\Rightarrow A(2023)\cdot A(-3n-1)=A(2023-3n)\in H$ pentru $n=674$

$\Rightarrow A(1) \in H \Rightarrow A'(1) = A(-3) \in H \Rightarrow A(-3) \cdot A(2) = A(0) \in H$ ……………….…. **1 punct**

$A(0) \in H \Rightarrow A(k) \in H, \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow H = G$; nu convine $\Rightarrow A(2023) \notin H$ ………….... **1 punct**

3. **(7p)** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x-1}{e^x + |x|}$. Arătați că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ și apoi determinați primitiva F al cărei grafic trece prin punctul $A(0;2023)$.

(prof. Carp Cezar Nicolae, Câmpulung Moldovenesc)

<u>Rezolvare și barem</u>

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x - x}, x \in (-\infty;0) \\ \dfrac{x-1}{e^x + x}, x \in [0;+\infty) \end{cases}$$, f continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ ……….. **2 puncte**

$$F(x) = \begin{cases} \ln \dfrac{e^x - x}{e^x} + c, x \in (-\infty;0) \\ \ln \dfrac{e^x}{e^x + x} + c, x \in [0;+\infty) \end{cases}$$ … ……………..……………………………………**4 puncte**

$F(0) = 2023 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \ln \dfrac{e^x - x}{e^x} + 2023, x \in (-\infty;0) \\ \ln \dfrac{e^x}{e^x + x} + 2023, x \in [0;+\infty) \end{cases}$ …………...…………………1 **punct**

4. **(7p)** Se consideră funcția $f : (0;+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

a) **(2p)** Să se calculeze $\int_1^{\sqrt{3}} x^2 f(x)dx$;

b) **(2p)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 0$;

c) **(3p)** Demonstrați că $\int_1^x t^2 f(t)dt + \int_1^{\frac{1}{x}} f(t)dt = 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

(prof. Carp Gabriela Dorina, Câmpulung Moldovenesc)

<u>Rezolvare și barem</u>

a) $\int_1^{\sqrt{3}} x^2 f(x)dx = \dfrac{\ln 2}{2}$ …………………………………………………………… **2 puncte**

b) $F(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$, $F(1) = 0 \Rightarrow F(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \dfrac{\ln 2}{2}$ ....**2 puncte**

c) $\int_1^x t^2 f(t)dt + \int_1^{\frac{1}{x}} f(t)dt = \int_1^x \dfrac{t}{t^2+1}dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{t(t^2+1)}dt$ ……………………………..………...**1 punct**

$= \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_1^x + \ln(t)\Big|_1^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_1^{\frac{1}{x}} = \ln\dfrac{1}{x} + \ln x = \ln 1 = 0$ ……………………………**2 puncte**