CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA - 18 FEBRUARIE 2023

CLASA a X-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Se consideră numerele: $a = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$ și $b = \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$.

a) **(4p)** Calculați $a \cdot b$ și $a+b$.

b) **(3p)** Arătați că

$\frac{1}{1+a+a^2} + \frac{1}{1+b+b^2} + \frac{1}{1+a+b}$ este număr natural

Prof. Mihaela-Loredana Breabăn

SOLUȚIE:

1a)	$a \cdot b = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(9+4\sqrt{5}) \cdot (9-4\sqrt{5})} = \sqrt[3]{81-80} = 1$	1p
	Notăm cu $S = a+b, S \in \mathbb{R}$. Ridicăm la puterea a treia și obținem $S^3 = 18 + 3S$	1p
	$\Leftrightarrow (S-3)(S^2+3S+6) = 0$	1p
	o singura soluție reală $S = 3$	1p
1b)	Din $a \cdot b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a}$	1p
	$\frac{1}{1+a+a^2} + \frac{1}{1+b+b^2} + \frac{1}{1+a+b} = \frac{1}{1+a+a^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{1}{1+a+\frac{1}{a}}$	1p
	$= \frac{1}{1+a+a^2} + \frac{a^2}{1+a+a^2} + \frac{a}{1+a+a^2} = 1$	1p

2. a) **(2p)** Calculați $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

b) **(5p)** Fie $x > 0, x \neq 1, n$ un număr natural și numerele $A = \log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x + \cdots + \log_{\sqrt[n]{5}} x$,

$B = \log_x 5 + \log_{\sqrt{x}} 5^2 + \cdots + \log_{\sqrt[n]{x}} 5^n$. Arătați că $A \cdot B$ nu depinde de x.

Prof. Mihaela-Loredana Breabăn

SOLUȚIE:

2a)	Utilizând formula $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$	1p
	obținem $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = \log_2 8 = 3$	1p
2b)	$A = \log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x + \cdots + \log_{\sqrt[n]{5}} x \Leftrightarrow A = \log_5 x + 2\log_5 x + \cdots + n\log_5 x \Leftrightarrow$ $A = \log_5 x\,(1 + 2 + 3 + \cdots. + n) \Leftrightarrow A = \log_5 x \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$	2p
	$B = \log_x 5 + \log_{\sqrt{x}} 5^2 + \cdots + \log_{\sqrt[n]{x}} 5^n \Leftrightarrow B = \log_x 5 + 2^2 \log_x 5 + \cdots + n^2 \log_x 5 \Leftrightarrow$ $B = \log_x 5\,(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \Leftrightarrow B = \log_x 5 \cdot \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	2p
	$A \cdot B = \dfrac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}$	1p

3. **(7p)** Știind că $z \cdot \bar{z} = \|z\|^2, \forall z \in C$ demonstrați că dacă $z_1, z_2, z_3 \in C$ astfel încât

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = r, r > 0$ și $z_1 + 3z_2 - 4z_3 = 0$ atunci

$\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{3}{z_2} - \dfrac{4}{z_3} = 0$

și $z_2 \cdot z_3 + 3z_1 \cdot z_3 - 4z_1 \cdot z_2 = 0$.

Prof. Mihaela Niculina Moisuc

SOLUȚIE:

3	$\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\| = r \Rightarrow \|z_1\|^2 = \|z_2\|^2 = \|z_3\|^2 = r^2 \Rightarrow \overline{z_1} = \dfrac{r^2}{z_1}, \overline{z_2} = \dfrac{r^2}{z_2}, \overline{z_3} = \dfrac{r^2}{z_3}$	3p
	din $z_1 + 3z_2 - 4z_3 = 0 \Rightarrow \overline{z_1} + 3\overline{z_2} - 4\overline{z_3} = 0$, obținem relația $\frac{1}{z_1} + \frac{3}{z_2} - \frac{4}{z_3} = 0$	2p
	apoi în aceasta aducem la același numitor $z_2 \cdot z_3 + 3z_1 \cdot z_3 - 4z_1 \cdot z_2 = 0$	2p

4. **(7p)** Să se rezolve ecuația: $\sqrt[4]{9(6+log_2x)}+\sqrt{5(2+log_2x)}=8$.

SOLUȚIE:

4	Notăm $log_2x=t$, din condițiile de existență a ecuației $t>-2$. Ecuația devine $\sqrt[4]{9(6+t)}+\sqrt{5(2+t)}=8$	1p
	Notăm $\sqrt[4]{9(6+t)}=a\geq 0 \Rightarrow a^4=54+9t$, $\sqrt{5(2+t)}=b\geq 0 \Rightarrow b^2=10+5t$	1p
	Eliminând t și folosind $b=a-8$ se obține ecuația $5a^4-9a^2+144\,a-756=0$	1p
	$(a-3)(5a^3+15a^2+36\,a+252)=0$	2p
	Cum $a\geq 0 \Rightarrow a^3+15a^2+36\,a+252>0$ și atunci $a=3$ soluție unică	1p
	Din $a=3 \Rightarrow b=5, t=3>-2.$ Atunci, $log_2x=3 \Rightarrow x=8$	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.