CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA - 18 FEBRUARIE 2023

CLASA a XI-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. (7p) Fie a, b, c, d, x, y, z, t numere reale astfel încât $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ și a, b, c, d sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Arătați că numerele $y-x, z-y$ și $t-z$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Din relația $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow$ $a^2 + bc = x, ab + bd = y, ac + cd = z, bc + d^2 = t.$	**2p**
Deoarece a, b, c, d sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice $\Rightarrow b = a + r, c = a + 2r, d = a + 3r$, unde r este rația progresiei.	**1p**
Avem $y - x = r^2 + 2ar,\ z - y = 3r^2 + 2ar,\ t - z = 5r^2 + 2ar$	**2p**
Numerele $y-x, z-y$ și $t-z$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice dacă $2(z-y) = (y-x) + (t-x).$	**1p**
Finalizare .	**1p**

2. Se consideră determinantul $D(a,b) = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.

a) **(4p)** Calculați $D(a,b)$ știind că $a^3 - b^3 = 17\sqrt{7}$.
b) **(3p)** Demonstrați că $D(a,b) + D(b,a) = 0$ dacă și numai dacă $a = b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.

a) $D(a,b) = a^6 + b^6 - 2a^3b^3 = \left(a^3 - b^3\right)^2$ $D(a,b) = \left(17\sqrt{7}\right)^2 = 2023.$	3p 1p
b) Dacă $D(a,b) + D(b,a) = 0$, atunci $\left(a^3 - b^3\right)^2 + \left(b^3 - a^3\right)^2 = 0 \Rightarrow 2\left(a^3 - b^3\right)^2 = 0 \Rightarrow a^3 - b^3 = 0 \Rightarrow a = b$ Dacă $a = b \Rightarrow D(a,b) = D(b,a) = 0 \Rightarrow D(a,b) + D(b,a) = 0$.	2p 1p

3. Fie funcția $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$, unde *D* este domeniul maxim de definiție.

a) **(2p)** Determinați mulțimea *D*.

b) **(5p)** Determinați asimptotele funcției f.

a) Condiția de existență este $\frac{x-1}{x-2} \geq 0$, de unde obținem $D = (-\infty, 1] \cup (2, \infty)$	2p
b) Explicităm modulul și obținem: $f(x) = \begin{cases} -x\sqrt{\frac{1-x}{2-x}} & x \in (-\infty, 0) \\ x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}, & x \in [0,1] \cup (2, \infty) \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, deci nu există asimptotă orizontală. $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 1$. $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{2}$, de unde dreapta de ecuație $y = x + \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.	2p
$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}\right) = -1.$ $n = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{1-x}{2-x}} + x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x(\sqrt{2-x} - \sqrt{1-x})}{\sqrt{2-x}} = -\frac{1}{2}$, de unde dreapta de ecuație $y = -x - \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.	2p
$\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ x>2}} x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 2\sqrt{\frac{1}{0_+}} = \infty$, de unde dreapta de ecuație $x = 2$ este asimptotă verticală la dreapta.	1p

4. Se consideră funcția $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_n(x) = 1 - x\sin nx,\ n \in N^*$.

a) **(2p)** Arătați că numărul $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - f_{2023}(x)}{x^2}$ este natural.

b) **(5p)** Calculați $l = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{n - f_1(x) - f_2(x) - \ldots - f_n(x)}{x^2}$, unde $n \in N^*$.

a) $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-1+x\sin 2023x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2023x}{2023x} \cdot 2023 = 2023 \Rightarrow A \in \mathbb{N}$	2p
b) $l = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1-f_1(x)\right)+\left(1-f_2(x)\right)+\ldots+\left(1-f_n(x)\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x + x\sin 2x + \ldots + x\sin nx}{x^2}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 + \ldots + \dfrac{\sin nx}{nx} \cdot n \right)$ $= 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.	2p 2p 1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.