CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA - 18 FEBRUARIE 2023

CLASA a XII-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. (7p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} e^x \sin x, x<0 \\ x\sqrt{x^2+1}, x\geq 0\end{cases}$. Demonstraţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi calculaţi apoi primitiva cu proprietatea că $F(0)=\frac{1}{3}$.

(prof. Moisuc Niculina Mihaela, Rădăuţi)

Soluție :

Cum orice funcție continuă pe $\mathbb{R}$ admite primitive se demonstrează continuitatea funcției pe $\mathbb{R}$	**(1p)**
$\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x\right)+C_1 \\ \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+C_2\end{cases}$	**(3p)**
$\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C \\ \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\frac{5}{6}+C\end{cases}$	**(2p)**
Din condiția $F(0)=\frac{1}{3}$.se obține $C=\frac{5}{6}$	**(1p)**

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) **(3p)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) **(4p)** Să se calculeze $\int f^2(x)dx$, $\int \frac{1}{f(x)}dx$, $\int f(x)dx$.

(prof. Moisuc Niculina Mihaela, Rădăuţi)

Soluție :

a) Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f atunci $\begin{cases}F \text{ este derivabilă pe } \mathbb{R} \\ F'(x)=f(x), (\forall)x\in\mathbb{R}\end{cases}$	**(1p)**

Condiția ca orice primitivă a funcției f este strict crescătoare impune ca $F'(x)>0,\ (\forall)x\in R$ adică, $f(x)>0,\ (\forall)x\in R$ evident	**(2p)**
b) $\int f^2(x)dx=\frac{x^3}{3}+x+C$	**(1p)**
$\int \frac{1}{f(x)}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$	**(1p)**
$\int f(x)dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]+C$	**(2p)**

3. Fie a real, G=(a,∞) și operația $x*y=xy-ax-ay+a^2+a$

a) **(1,5p)** Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$” .
b) **(4p)** Studiați existența elementului neutru și determinați elementele simetrizabile ale lui G față de operația „$*$”.
c) **(1,5p)** Determinați a real negativ, dacă rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $x*x$=0 verifică relația $x_1+x_2+x_1x_2=a^2-3$.

(prof. Macovei Narcisa, Suceava)

Soluție :

a) $x*y=(x-a)(y-a)+a,$ unde x,y sunt din G	**(0,5p)**
$\forall x,y\in G\Rightarrow x*y\in G \Leftrightarrow \forall\begin{cases}x>a\\y>a\end{cases}\Rightarrow (x-a)(y-a)+a>a$ (A)	**(1p)**
b) Determinarea elementului neutru $e=a+1$	**(2p)**
Determinarea elementelor simetrizabile $x'=a+\dfrac{1}{x-a}\in(a,\infty)$	**(2p)**
c) $x*x$=0 implică $x^2-2\text{ax}+a^2+a=0$. Folosind relațiile lui Viete $\begin{cases}x_1+x_2=2a\\x_1x_2=a^2+a\end{cases}$	**(1p)**
Finalizare $a=-1$	**(0,5p)**

4. Fie a$\in\mathbb{R}^*$și mulțimea de matrice $G_a=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}a^k & a^k-1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & a^k\end{pmatrix} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) **(4p)** Arătați că G_{2023} are structură de grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor.
b) **(3p)** Rezolvați ecuația $(A(k))^n=A(1)$ în G_{2023}, unde n$\in\mathbb{N}^*$.

(prof. Macovei Narcisa , Suceava)

Soluție :

a) $A(k)A(l)=A(k+l)$, unde $k, l \in \mathbb{Z}$	**(0,5p)**
G1: $\forall A(k), A(l) \in G_{2023} \Rightarrow A(k)A(l) \in G_{2023}$	**(0,5p)**
G2: $\forall A(k), A(l), A(m) \in G_{2023} \Rightarrow \big(A(k)A(l)\big)A(m) = A(k)(A(l)A(m))$	**(1p)**
G3: $\forall \mathrm{A(k)} \in \mathrm{G}_{2023}, \exists \mathrm{A}(0) \in \mathrm{G}_{2023}$ astfel încât $\mathrm{A(k)}A(0) = A(0)A(k) = A(k)$	**(1p)**
G4: $\forall \mathrm{A(k)} \in \mathrm{G}_{2023}, \exists \mathrm{A}(-\mathrm{k}) \in \mathrm{G}_{2023}$ astfel încât $\mathrm{A(k)}A(-k) = A(-k)A(k) = A(0)$	**(1p)**
b) Demonstrarea prin metoda inducției matematice a egalității $(A(k))^n = A(nk)$, unde *n* natural oarecare	**(2p)**
Rezolvarea egalității din ipoteza conduce la *nk*=1, unde *n* natural și *k* întreg cu soluția *k*=1 și *n*=1	**(1p)**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.