CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA - 18 FEBRUARIE 2023

CLASA a IX-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$.

a) **(4p)** Să se arate că $a_{2023} - 3a_{2022} + a_{2021} = 0$.

b) **(3p)** Să se arate că a_{2n+1} este divizibil cu 3 pentru orice număr natural nenul n.

Rezolvare:

a) $$3a_n = 3 \cdot \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = a_{n+1} + a_{n-1}$$

Rezultă că $a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1} = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Pentru $n = 2022 \Rightarrow a_{2023} - 3a_{2022} + a_{2021} = 0$

b) Demonstrăm prin inducție matematică $p(n)$: $a_{2n+1} \,\vdots\, 3 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Demonstrarea relației : $a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1} = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	3p
Pentru $n = 2022 \Rightarrow a_{2023} - 3a_{2022} + a_{2021} = 0$.	1p
b) Demonstrația prin inducție matematică $p(n)$: $a_{2n+1} \,\vdots\, 3 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$	3p

2. Demonstrați că:

a) (**2p**) $\left[\sqrt{n^2+1}\right] = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) (**2p**) $\left[\sqrt{n^2+2n+2}\right] = n+1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

c)(**3p**) $\dfrac{1}{[\sqrt{2}]\cdot[\sqrt{5}]} + \dfrac{1}{[\sqrt{5}]\cdot[\sqrt{10}]} + \cdots + \dfrac{1}{\left[\sqrt{n^2+1}\right]\left[\sqrt{n^2+2n+2}\right]} = \dfrac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Rezolvare:

a) $n^2 \le n^2+1 < n^2+2n+1 \Rightarrow \sqrt{n^2} \le \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2n+1} \Rightarrow n \le \sqrt{n^2+1} < n+1$
atunci $\left[\sqrt{n^2+1}\right] = n$

b) $n^2+2n+1 \le n^2+2n+2 < n^2+4n+4 \Rightarrow n+1 \le \sqrt{n^2+2n+2} < n+2$
atunci $\left[\sqrt{n^2+2n+2}\right] = n+1$

$c)\ S = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$

a) $n^2 \le n^2+1 < n^2+2n+1 \Rightarrow \sqrt{n^2} \le \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2n+1}$ $n \le \sqrt{n^2+1} < n+1$ atunci $\left[\sqrt{n^2+1}\right] = n$	2p
b) $n^2+2n+1 \le n^2+2n+2 < n^2+4n+4$ $n+1 \le \sqrt{n^2+2n+2} < n+2$ atunci $\left[\sqrt{n^2+2n+2}\right] = n+1$	2p
c) $S = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$	3p

3. (**7p**) Demonstrați că $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{15}{16}\cdot \ldots \cdot\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{n+2}{2(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Rezolvare:

Egalitatea poate fi demonstrată atât prin inducție matematică cât și prin calculul produsului adus la forma :

$$\frac{1\cdot(1+2)}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot(2+2)}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot(3+2)}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n\cdot n}\cdot\frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n\cdot n}\cdot\frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)},\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$$

$\dfrac{1\cdot(1+2)}{2\cdot 2}\cdot\dfrac{2\cdot(2+2)}{3\cdot 3}\cdot\dfrac{3\cdot(3+2)}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(n-1)\cdot(n+1)}{n\cdot n}\cdot\dfrac{n\cdot(n+2)}{(n+1)^2} =$	3p
$= \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(n-1)\cdot(n+1)}{n\cdot n}\cdot\dfrac{n\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)},\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$	4p

4. Se consideră progresiile aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ și $(b_n)_{n\geq1}$.

a) (**4p**) Demonstrați că șirul $(c_n)_{n\geq1}$ cu $c_n = 5\cdot a_n + 3\cdot b_n$ este în progresie aritmetică.

b) (**3p**) Demonstrați că șirul $(d_n)_{n\geq1}$ cu $d_n = 10^{c_n}$ este în progresie geometrică. Șirul $(c_n)_{n\geq1}$ este șirul de la punctul a).

Rezolvare:

a)

$2\cdot c_n = 2\cdot(5\cdot a_n + 3\cdot b_n) = 5\cdot(a_{n-1} + a_{n+1}) + 3(b_{n-1} + b_{n+1}) =$

$= 5a_{n-1} + 3b_{n-1} + 5a_{n+1} + 3b_{n+1} = c_{n-1} + c_{n+1}$

Deci $(c_n)_{n\geq1}$ este în progresie aritmetică

b).

$b_n{}^2 = (10^{c_n})^2 = 10^{2c_n} = 10^{c_{n-1}+c_{n+1}} = 10^{c_{n-1}}\cdot 10^{c_{n+1}} = b_{n-1}\cdot b_{n+1}, \forall n\geq 2$

Deci $(d_n)_{n\geq1}$ este în progresie geometrică

a) $(a_n)_{n\geq1}$ în progresie aritmetică $\Leftrightarrow 2\cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, \forall n\geq 2$	1p
$(b_n)_{n\geq1}$ în progresie aritmetică $\Leftrightarrow 2\cdot b_n = b_{n-1} + b_{n+1}, \forall n\geq 2$	1p
$(c_n)_{n\geq1}$ în progresie aritmetică $\Leftrightarrow 2\cdot c_n = c_{n-1} + c_{n+1}, \forall n\geq 2$	1p
$2\cdot c_n = 2\cdot(5\cdot a_n + 3\cdot b_n) = 5\cdot(a_{n-1} + a_{n+1}) + 3(b_{n-1} + b_{n+1}) =$ $= 5a_{n-1} + 3b_{n-1} + 5a_{n+1} + 3b_{n+1} = c_{n-1} + c_{n+1}$	1p
b) $(c_n)_{n\geq1}$ în progresie aritmetică $\Leftrightarrow 2\cdot c_n = c_{n-1} + c_{n+1}, \forall n\geq 2$	1p
$(d_n)_{n\geq1}$ în progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n{}^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1, \forall n\geq2}$	1p
$b_n{}^2 = (10^{c_n})^2 = 10^{2c_n} = 10^{c_{n-1}+c_{n+1}} = 10^{c_{n-1}}\cdot 10^{c_{n+1}} = b_{n-1}\cdot b_{n+1}, \forall n\geq 2$	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.